Voorbereiding toelatingsexamen arts/tandarts

Wiskunde arts 2024 Oplossingen

21 juli 2024

Brenda Casteleyn, PhD

Keu6

Coaching & Onderzoek

Vraag 1

Grootheid A is omgekeerd evenredig met grootheid B. Grootheid D is recht evenredig met grootheid B^2. Welke van de volgende grootheden is dan recht evenredig met B?

$A \approx 1/B$

$D \approx B^2$

- ➔ $A.D \approx 1/B.\ B^2 = B$
- ➔ Antwoord C

Vraag 2

Als de veelterm $3x^3 - 2x + ax + 5a$ deelbaar is door $2x + 1$, dan is het reëel getal a gelijk aan:

$2x+1=0 \Longrightarrow x = -1/2$

Met Horner:

	3	-2	a	5a
-1/2		-3/2	7/4	-a/2 – 7/8
	3	-7/2	a + 7/4	5a – a/2 -7/8

$5a - a/2 - 7/8 = 0$

$9/2\ a = 7/8$ of $a = 7/8.\ 2/9 = 7/36$

Je kan uiteraard ook een Euclidesdeling maken.

- ➔ Antwoord A

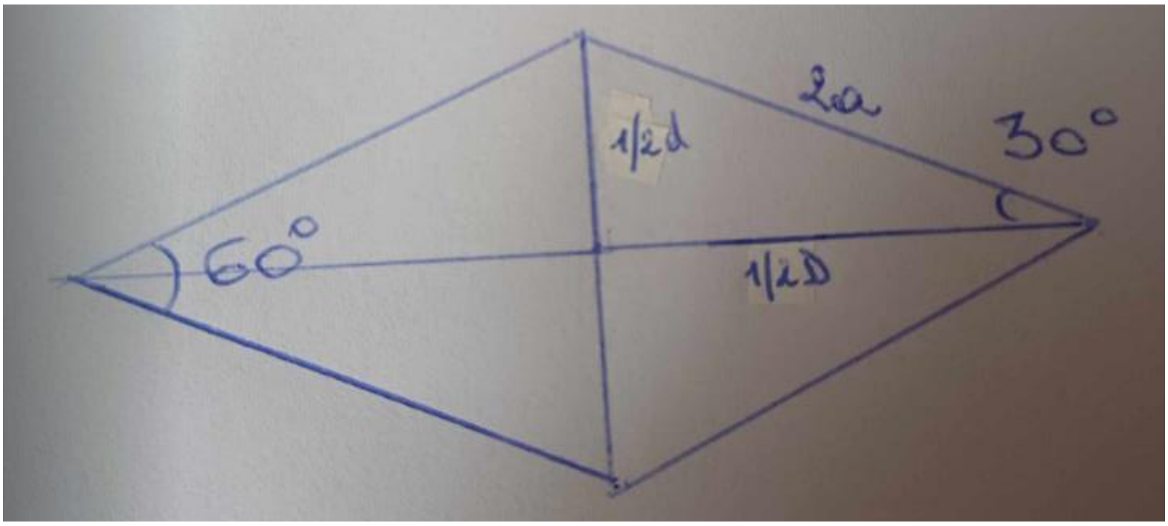
Vraag 3

Bij een tomografie maakt men laagjesgewijs een beeld van een vlakke doorsnede van een driedimensionaal object. Bij zo'n tomografische analyse van een bepaald object ziet men achtereenvolgens een cirkel met straal a, een vierkant met zijde 2a, een ruit met zijde 2a en met twee overstaande hoeken van 60° en een rechthoek met zijden van lengte 1,5a en 2,5a. Welke doorsnede heeft de kleinste oppervlakte?

Oppervlakte cirkel = $\pi.a^2$ of $\mathbf{3{,}14.a^2}$

Oppervlakte vierkant = $(2a)^2$ = $\mathbf{4a^2}$

Oppervlakte ruit = $\frac{D.d}{2}$



Bereken de helft van D en d met de hoek van 30° en de schuine zijde 2a:

1/2d = 2a. sin30° = 2.a. ½ = a → d = 2a

1/2D = 2a.cos30° = 2a. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = a. $\sqrt{3}$ → $D = 2a.\sqrt{3}$

Oppervlakte ruit $= (2a.\ 2a.\ \sqrt{3})/2 = 2a^2\ \sqrt{3} =$ **3,46 a^2**

Oppervlakte echthoek $= 2{,}5a\ .\ 1{,}5a = 5/2\ a\ .\ 3/2a = 15/4a^2 =$ **3,75a^2**

- → De cirkel heeft de kleinste oppervlakte
- → Antwoord D

<u>Vraag 4</u>

Voor hoeveel verschillende reële waarden van a is de volgende gelijkheid geldig?

$$\int_{-a}^{0} (3x + a)dx = 1$$

$\left[\frac{3x^2}{2} + ax\right]_{-a}^{0}$ = 1

(0 + 0) - $\left[\frac{3a^2}{2} + a(-a)\right]$ = 1

$\left[\frac{3a^2}{2} - a^2\right]$ = 1

-1/2 a^2 = 1

Negatief = positief, is onmogelijk

- → Voor geen enkele waarde van a is deze gelijkheid geldig
- → Antwoord C

Vraag 5

Uit een team van drie vrouwelijke en drie mannelijke dokters wordt lukraak een groepje van drie personen gekozen.

Hoe groot is de kans dat dit groepje bestaat uit twee vrouwen en één man?

Totaal aantal mogelijke combinaties van drie personen uit zes: $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$

Aantal mogelijke manieren om uit een groep van drie vrouwen twee vrouwen te kiezen:

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

Aantal mogelijke manieren om uit een groep van drie mannen één man te kiezen:

$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$

Het totale aantal manieren om twee vrouwen en één man te kiezen is het product van de bovengenoemde combinaties:

$3 \cdot 3 = 9$ mogelijke combinaties op een totaal van 20. De kans is dus 9/20 = 45%

Alternatieve berekeningswijze:

Er zijn drie manieren om uit 3 V en 3 M een groepje van 2 vrouwen en 2 mannen te kiezen:

- VVM : 3/6 (kans op 1 V uit 3V en 3M) . 2/5 (kans V uit overige 2V en 5 mensen).3/4 (kans M uit overgebleven 3 M en 4 mensen) = **3/20**
- VMM: 3/6.3/5.2/4 = **3/20**
- MVV: 3/6.3/5.2/4 = **3/20**

Totaal van de drie mogelijke manieren: 3/20 + 3/20 +3/20 = 9/20 = 45%

➔ Antwoord D

Vraag 6

De matrices A en B zijn gegeven door:

$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix} \; en \; B = \begin{bmatrix} c & 3 \\ 4 & d \end{bmatrix}$

Waarbij a, b, c en d reële getallen zijn.

Als A.A = B, dan is $\frac{ab}{cd}$ gelijk aan

Oplossing:

A.A = B

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 3 \\ 4 & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+ab & 3a \\ 3b & ab+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 3 \\ 4 & d \end{bmatrix}$$

1+ab = c

3b =4 → b = 4/3

3a = 3 → a = 1

ab+4 = d

1+4/3 = c → c = -7/3

4/3+4 = d → d = -16/3

ab/cd = $\frac{1.\frac{4}{3}}{\frac{7}{3}.\frac{16}{3}}$ = 3/28

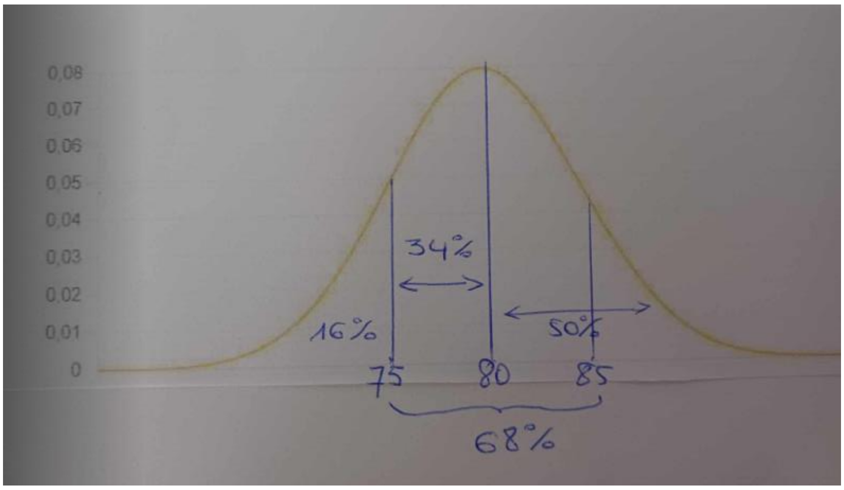
- → Antwoord D

<u>Vraag 7</u>

<u>Vooraf</u>: voor een standaard normaal verdeelde toevalsvariabele Z geldt de 68-95-99,7-vuistregel: P(-1<Z<1) ~ 0,68; P(-2<Z<2) ~0,95; P(-3<Z<3) ~ 0,997.

Een vereniging organiseert jaarlijks een grootschalige wafelenbak in al haar afdelingen. Op basis van een aantal steekproeven besluit het bestuur dat het gewicht van de verkochte wafels normaal verdeeld is met een gemiddelde van 80 g en een standaardafwijking van 5 g. Twee personen worden lukraak uit de wafeleters gekozen. Wat is de kans dat één van hen een wafel krijgt van minder dan 75g en de ander een wafel van minstens 80 g?

Oplossing:



P(<75) = (50-35)/100 = 16/100 of 4/25

P (≥80) = 50/100 = ½

P(<75) . P (≥80) = 4/25. ½ = 4/50 (eerste persoon minder dan 75, tweede 80 of meer)

P (≥80) . P(<75) = . ½. 4/25 = 4/50 (eerste persoon 80 of meer, tweede minder dan 75)

P = 2/25+2/25 = 4/25 = 16%

- ➔ Antwoord D

Vraag 8

De hoeken worden in deze vraag uitgedrukt in radialen.

Als α € $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en $\cos^2\alpha = \frac{1+\sin\alpha}{2}$, dan is tan α gelijk aan

Oplossing:

Gebruik $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ en vervang:

$1- \sin^2\alpha = \frac{1+\sin\alpha}{2}$

$2- 2\sin^2\alpha = 1 + \sin\alpha$

$-2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 0$

Neem sin α = x en los de kwadratische vergelijking op:

$-2x - x + 1 = 0$

$X_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{-4} = -1$

$X_2 = \frac{1-\sqrt{9}}{-4} = ½$

Dus sin α is gelijk aan -1 of ½ maar voor sinα = -1 is α = -π/2 en dat ligt niet in het gegeven interval. Dus er is enkel een oplossing voor sin α = ½ met sin α = π/6.

Tan (π/6) = $1/\sqrt{3}$ of $\sqrt{3}$ /3

- ➔ Antwoord A

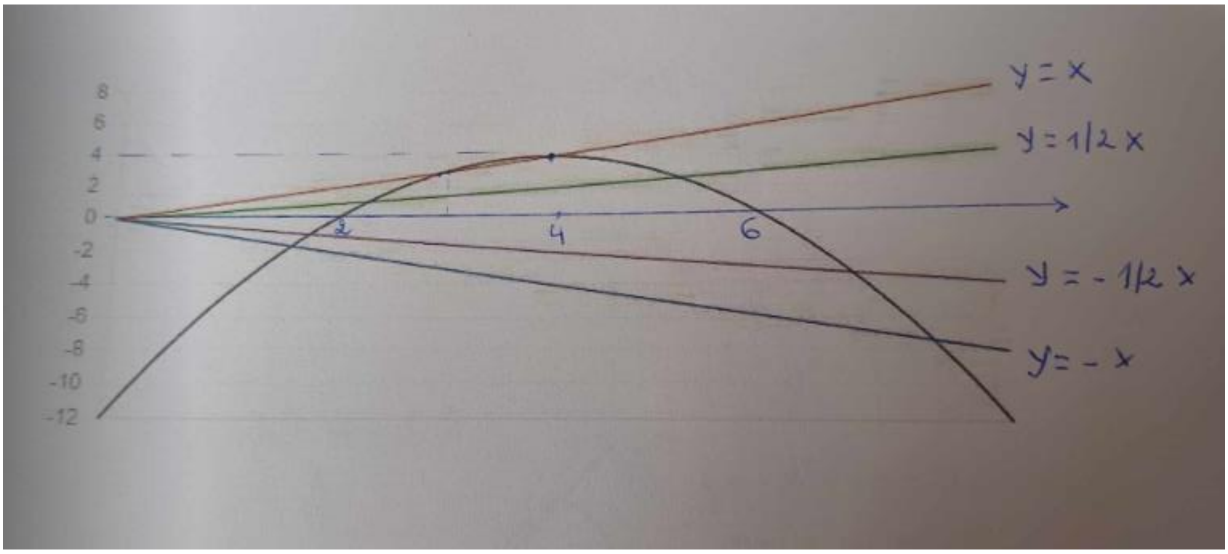
Vraag 9

De parabool p heeft vergelijking $y = -x^2 + 8x - 12$. Elk van de volgende vier rechten snijdt de parabool in twee verschillende punten. Voor welke rechte liggen de snijpunten met de parabool p het verst uit elkaar?

Oplossing: teken de parabool en de rechten:

Nulpunten parabool: $y = -x^2 + 8x - 12$ → $y = -(x^2 + 8x - 12) = -(x-6)(x-2)$: nulpunten voor x=2 en x=6.

Coördinaat van de top: $x_{top} = - b/2a = -8/-2) = 4$ → $y(4) = -4^2 + 8.4 - 12 = -16 + 32 - 12 = 4$



De snijpunten liggen het verst uit elkaar bij de vergelijking y = -x

- ➔ Antwoord B

<u>Vraag 10</u>

<u>Vooraf:</u> zoals gebruikelijk stelt e het grondgetal van de natuurliljke logaritme voor.

Beschouw de reële functie f met voorschrift $f(x) = (x^2 – 9)e^{-x}$.Welke bewering over het functieverloop van f is als enige correct?

Oplossing:

Bepaal de eerste afgeleide met de productregel:

$f'(x) \quad = (x^2–9)'e^{–x} + (x^2–9)(e^{–x})'$

$\qquad\quad = 2x\, e^{–x} - (x^2–9)\, e^{–x}$

$\qquad\quad = e^{–x} (2x – x^2 + 9)$

$\qquad\quad = e^{–x} (– x^2 + 2x + 9)$

Stel $f'(x) = 0$ ➔ $(– x^2 + 2x + 9) = 0$

$X_1 = (-2 + \sqrt{40}\ ) / 2 = (-2 + 2\sqrt{10})/2 = 1 + \sqrt{10}$

$X_2 = = (-2 - \sqrt{40}\ ) / 2 = (-2 - 2\sqrt{10})/2 = 1 - \sqrt{10}$

Tekenverloop:

X		-3	$1-\sqrt{10}$		$1+\sqrt{10}$	3	
Y‘	------------------		0	++++++++	0	-----------------	
Y	-------	0 +++					
			Minimum		Maximum		

Buigpunten : tweede afgeleide = 0

$F''(x) = (e^{-x}(-x^2 + 2x + 9))'$

$= e^{-x}(-x^2+2x+9)' + (e^{-x})'((-x^2 + 2x + 9)$

$= e^{-x}(-2x + 2) - e^{-x}(-x^2 + 2x + 9)$

$= e^{-x}(-2x + 2 + x^2 - 2x - 9)$

$= e^{-x}(x^2 - 4x - 7)$

$X_1 = \frac{4+\sqrt{44}}{2} = \frac{4+2\sqrt{11}}{2} = 2 + \sqrt{11}$

$X_2 = \frac{4-\sqrt{44}}{2} = \frac{4-2\sqrt{11}}{2} = 2 - \sqrt{11}$

Horizontale asymptoot:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^2 - 9)e^{-x}$

$= \lim_{x\to\infty} (x^2 - 9)/e^x$

$= \lim_{x\to\infty} 2x/e^x$

$= \lim_{x\to\infty} 2/e^x$

$= 1/\infty = 0$

De horizontale asymptoot is dus: $y = 0$

- ➔ De functie heeft twee buigpunten en een horizontale asymptoot
- ➔ Antwoord D

A. De functie heeft geen buigpunten en heeft geen horizontale asymptoot.
B. De functie bereikt een negatief lokaal minimum, een negatief lokaal maximum en heeft een horizontale asymptoot.
C. De functie bereikt een negatief lokaal minimum, een positief lokaal maximum en heeft geen horizontale asymptoot.
D. De functie heeft twee buigpunten en een horizontale asymptoot.