Statistiek: Het sommatieteken

25 oktober 2015

dr. Brenda Casteleyn

Keu6
Coaching & Onderzoek

1. Theorie

Het sommatieteken ∑ wordt gebruikt om een som verkort voor te stellen.

1) Optelling van waarden met een bepaalde beginwaarde en een eindwaarde

$\sum_{k=1}^{5} \mathrm{k}$ = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 waarbij je k vervangt door de waarden gaande van 1 tot 5 en deze optelt.

$\sum_{k=2}^{5} \mathrm{k}$ = 2 + 3 + 4 + 5 = 14

2) Optelling van een constante:

$\sum_{k=2}^{5} \mathrm{a} =$ a + a + a + a = 4a (je telt dus a op voor k= 2de, voor k = 3de, voor k = 4de en voor k = 5de keer) Algemeen: $\sum_{k=2}^{5} \mathrm{a} = (\mathrm{maxgrens} - \mathrm{mingrens} + 1)$a Om de factor waarmee je a vermenigvuldigt te vinden bereken je dus het verschil tussen de grenzen en je telt er 1 bij op; In dit geval is de maximumgrens 5 en de minimumgrens 2, we komen dus uit op 4: dit is de reikwijdte van de sommatie. Dus uitkomst wordt:

5-2+1 = 4 --> 4.a

M.a.w. de sommatie van een constante is gelijk aan de reikwijdte van de constante vermenigvuldigd met die constante.

3) Optelling van een serie gegevens vertrekkend van het gegeven met het volgnummer van de ondergrens en eindigend bij het gegeven met het volgnummer van de bovengrens: bv. van X_2 tot X_5 optellen wordt dan:

$\sum_{k=2}^{5} \mathrm{x_k} = \mathrm{x_2} + x_3 + x_4 + x_5$

Hier wordt het dus gebruikt wanneer we de som willen maken van een reeks gegevens. Hieronder staat bijvoorbeeld de leeftijd van een aantal mensen genoteerd.

Leeftijd	Frequentie	
10 jaar	5	= X_1
12 jaar	22	= X_2
15 jaar	10	= X_3
17 jaar	20	= X_4
Som	57	= X_5

Wanneer we willen weten hoeveel mensen er in het totaal werden gemeten, kunnen we zeggen: maak de som van: aantal 10-jarigen + aantal 12-jarigen + aantal 15-jarigen + aantal 17-jarigen. Of korter kunnen we zeggen: tel de 1ste tot de 5de frequentie op = $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$. En nu nog korter met het ∑-teken:

$\sum_{k=1}^{5} x_k$ met x = frequentie en k = rangorde van de frequentie (1ste, 2de... tot 5de)

$= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

4) Dubbele sommatie:

Hieronder een tabel met de bezoekersaantallen van verschillende theatervoorstellingen van Zomen van Antwerpen per leeftijdscategorie.

Leeftijd	Voorstelling 1	Voorstelling 2	Voorstelling 3	Totaal
Jonger dan 30	60	19	26	105
30-40 jaar	30	19	26	75
41-54 jaar	28	25	51	104
54 jaar en ouder	12	21	85	118
Totaal	130	84	188	402

Als we willen weten hoeveel mensen er in het totaal werden bevraagd kunnen we eerst de sommen maken van elke voorstelling (alle kolomtotalen maken) en dan die kolomtotalen optellen. Of we kunnen omgekeerd de totalen per leeftijd optellen (alle rijtotalen maken) en daarna die rijtotalen optellen.

Zo'n som stellen we als volgt voor: $\sum_{r=1}^{4} \sum_{k=1}^{3} x_{rk}$

Om dit te berekenen ga je als volgt te werk: schrijf één van de sommaties uit:

$\sum_{k=1}^{3} x_{rk} = x_{r1} + x_{r2} = x_{r3}$. Vul nu deze uitkomst in bij de andere sommatie en schrijf uit:

$\sum_{r=1}^{4} (x_{r1} + x_{r2} + x_{r3}) = \sum_{r=1}^{4} x_{r1} + \sum_{r=1}^{4} x_{r2} + \sum_{r=1}^{4} x_{r3}$ (rekenregel: een som mag je opsplitsen)

En nu kan je de drie afzonderlijke sommaties berekenen. Het eindresultaat is dus:

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}$

(= som vier waarden van eerste kolom + som vier waarden 2de kolom + som 4 waarden 3de kolom)

= 60 + 30 + 28 + 12 + 19 +19 +25 +21 + 26 + 26 + 51 + 85 =402

5) Rekenregels:

Je mag een sommatie van een som opsplitsen:

$\sum_{i=1}^{7}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{7} x_i + \sum_{i=1}^{7} y_i$

Een vermenigvuldiging mag je niet opsplitsen in een product!

Je mag een constante vooraan zetten:

$\sum_{i=1}^{7} c.x_i = c. \sum_{i=1}^{7} x_i$ (c is een constante)

$\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{c}.x_i = \frac{1}{c}. \sum_{i=1}^{7} x_i$ (1/c is een constant)

Dubbele sommaties mag je van volgorde wisselen:

$\sum_{r=1}^{4} \sum_{k=1}^{3} \mathrm{x}_{\mathrm{rk}} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{r=1}^{4} \mathrm{x}_{\mathrm{rk}}$

Speciaal geval: de sommatie van logaritmes is gelijk aan het logaritme van een product. Dit is een gevolg van de rekenregels van logaritmes (waarbij de som van logaritmes gelijk is aan het logaritme van het product.

$\sum_{k=2}^{5} \log(\mathrm{f}(\mathrm{k})) = \log(\prod_{\mathrm{k}=2}^{5} \mathrm{f}(\mathrm{k}))$

2. Oefeningen

1) Schrijf volgende sommaties uit:

a) $\sum_{j=1}^{6} x_j$

b) $\sum_{j=-1}^{6} 3$

c) $\sum_{j=1}^{4} (y_j - 3)^2$

d) $\sum_{1}^{n} b$

e) $\sum_{i=1}^{2}(x_i - b)$

f) $\sum_{a=1}^{5} a^2$

g) $\sum_{i=0}^{3}(\frac{2^i}{3} + 5)$

h) $\sum_{i=0}^{3} 2^i + 5$

2) Gegeven volgende gegevens:

X	Y
2	16
3	5
8	3
20	2

Bereken volgende sommen:

a) $\sum_{i=2}^{4} x_i$

b) $\sum_{i=1}^{4} x_i\, y_i$

c) $\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \sum_{i=1}^{4} y_i$

d) $\sum_{i=1}^{4} x_i\, {y_i}^2$

e) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=-1}^{4} (i-j)$

3) Werk zover mogelijk uit met behulp van rekenregels (examen Thijssen, januari 2007)

a) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=2}^{5} \ log_4\left(\frac{2i^{\left(\frac{9}{3}\right)}}{j^5}\right)$

4) Druk uit door middel van een sommatieteken:

a) ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2 + {x_6}^2 + x_7 =$

b) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 =$

c) $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + (y_4 - x_4)^2 =$

d) $3x_2 \frac{y_4}{4} + 3{x_3}^2 \frac{y_3}{8} + 3{x_4}^3 \frac{y_2}{16} =$

5) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=3}^{5} \left[(2j - i^2) + \ 3\left(\frac{5}{3} - j\right)^2\right]$

3. Oplossingen

1) a) $\sum_{j=1}^{6} x_j = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

b) $\sum_{j=-1}^{2} (3) = 3 + 3 + 3 + 3 = 4.3 = 12$

van -1 tot 2 is reikwijdte 4 (nl. bovengrens - ondergrens + 1) = 2 - (-1)+1 = 2+1+1 = 4

Dus oplossing is 4.3

c) $\sum_{j=1}^{4}(y_j - 3)^2 = (y_1 - 3)^2 + (y_2 - 3)^2 + (y_3 - 3)^2 + (y_4 - 3)^2$

d) $\sum_{1}^{n} b$ = b+b+b...+b (n keren) = n.b (want reikwijdte = n-1+1 = n)

e) $\sum_{i=1}^{2}(x_i - b)$ = (x_1 - b) + (x_2 - b)

f) $\sum_{a=1}^{5} a^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

g) $\sum_{0}^{3}(\frac{2^i}{3} + 5) = (\frac{2^0}{3} + 5) + (\frac{2^1}{3} + 5) + \frac{2^2}{3} + 5) + (\frac{2^3}{3} + 5)$

= 1/3 +5 + 2/3 + 5 + 4/3 + 5 + 8/3 + 5 = 25

h) $\sum_{0}^{3} 2^i + 5 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 5$ = 1+2+4+8+5 = 20 (verschil met vorige oefening is dat er geen haakjes staan, dus de sommatie telt enkel voor 2^i en niet voor de 5)

2) a) $\sum_{i=2}^{4} x_i$ = 3 + 8 + 20 = 31

b) $\sum_{i=1}^{4} x_i\, y_i$ = 2.16 + 3.5 + 8.3 + 20.2 = 111

c) $\sum_{i=1}^{4} x_i \,.\sum_{i=1}^{4} y_i$ = (2+3+8+20) . (16+5+3+2) = 33 . 26 = 858

d) $\sum_{i=1}^{4} x_i\, {y_i}^2$ = (2.162) + (3.52) + (8.32) + (20.22) = 512 + 75 + 72 + 80 = 739

e) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=-1}^{4}(i - j) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=-1}^{4} i - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=-1}^{4} j$

= $\sum_{i=1}^{3} 6i$ - $\sum_{j=-1}^{4} 3j$ (= berekening van telkens één sommatie nl: $\sum_{j=-1}^{4} i$ = 6i en $\sum_{i=1}^{3} j$ = 3j)

=6 $\sum_{i=1}^{3} i$ - 3 $\sum_{j=-1}^{4} j$

= 6(1+2+3) - 3 (-1+0+1+2+3+4)

= 36 -27 = 9

andere manier: $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=-1}^{4}(i - j)$

$= \sum_{i=1}^{3}[(i - (-1) + i - 0 + i - 1 + i - 2 - i - 3 + i - 4)]$

$= \sum_{i=1}^{3}(6i - 9)$

= $\sum_{i=1}^{3}(6i)$ - $\sum_{i=1}^{3}(9)$

= 6$\sum_{i=1}^{3}(i)$- (3.9)

= 6(1+2+3) - 27 = 36 - 27 = 9

3) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{5} log_4(\frac{2i^{(\frac{9}{3})}}{j^5})$

= $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{5}(\ log_4 2i^3 - log_4\ j^5)$ eigenschap logaritme: log $(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$

= $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{5}(\ log_4 2i^3) - \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{5}(\ log_4\ j^5)$ eigenschap sommatie: splitsen som

= $4\sum_{i=1}^{3}(\ log_4 2i^3) - 3\sum_{j=2}^{5}(\ log_4\ j^5)$ berekening sommatie van constanten

$= 4\ (log_4 2.1^3 + log_4 2.2^3 + log_4 2.3^3\ ) - 3\ (log_4 2^5 + log_4 3^5 + log_4 4^5 + log_4 5^5)$

= 4 $(log_4(2.16.54) - 3(log_4(2^5 3^5 4^5 5^5))$ eigenschap logaritme: log(a) + log(b) = log(a.b)

= 4 $(log_4 1728) - 3\ (log_4 120^5)$

4) a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7 = \sum_{i=1}^{7} x_i^2$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7 = \sum_{i=1}^{4} a_i b_i$

c) $(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + (y_4 - x_4)^2 = \sum_{i=1}^{4}(y_i - x_i)^2$

d) $3x_2 \frac{y_4}{4} + 3x_3^2 \frac{y_3}{8} + 3x_4^3 \frac{y_2}{16} = 3\sum_{i=2}^{4} x_i^{i-1} \frac{y_{(6-i)}}{2^i}$

5) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}\left[(2j - i^2) + 3\left(\binom{5}{3} - j\right)^2\right]$

Splits in twee sommen en zet de factor 3 buiten haakjes:

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}[(2j - i^2)] + 3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}\left[\ \left(\binom{5}{3} - j\right)^2\right]$

Werk de eerste term uit:

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}[(2j - i^2)] = \sum_{i=1}^{3}[(2.3.i^2) + (2.4 - i^2) + (2.5 - i^2] =$

= $\sum_{i=1}^{3}[(6.i^2) + (8 - i^2) + (10 - i^2] =$

= $\sum_{i=1}^{3}[\ (24 - 3i^2]$

= $(24 - 3.1^2) + (24 - 3.2^2) + (24 - 3.3^2)$

= (24-3) + (24 - 12) + (24 -27)

= **30**

Werk de tweede term uit:

PS: bereken eerst: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Dus: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = \frac{20}{2} = 10$

$3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}[\ (10 - j)^2] = 3(\sum_{i=1}^{3}[(10-3)^2 + (10-4)^2 + (10-5)^2\ ]$

$= 3(\sum_{i=1}^{3}[7^2 + 6^2 + 5^2\ ]$

$= 3(\sum_{i=1}^{3}[110\ ]$

$= 3.\ (110 + 110 + 110) =$ **990**

Tel nu de resultaten van de twee termen op: 30 + 990 = 1020

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=3}^{5}\left[(2j - i^2) +\ 3\ (\begin{matrix}5\\3\end{matrix}\ -\ j\ )^2\right] = 1020$